ESTREMI LIBERI PER FUNZIONI A 3 VARIABILI

$f: D \to \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^3$ D APERTO

$f \in C^2(D)$

$1°$ PASSO : P.TI STAZIONARI S_f

$$\bar{\nabla} f(x,y,z) = \bar{0}$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases}$$

$2°$ PASSO $\to$ HESSIANA

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

VALE SCHWARZ $\to$ LE MISTE COINCIDONO

$P_0 \in S_f$

SE $H(P_0)$ È DEF. POS $\to$ P_0 MINIMO
" " " " NEG. $\to$ P_0 MAX
" " " INDEFINITA $\to$ P_0 SELLA

CASO DUBBIO : $H(P_0)$ È SEMIDEF.

- IN ALGEBRA $\to$ CLASSIFICAZIONE MATRICI SIMMETRICHE

$\hookrightarrow$ A MAT. SIMMETRICA DI ORDINE 'N' $\Rightarrow$ A AMMETTE N AUTOVALORI REALI $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\Rightarrow$ DEF. POS SSE $\lambda_1 \dots \lambda_n > 0$
" NEG " $\lambda_1 \dots \lambda_n < 0$
INDEFINITA SSE $\exists\, i, j : \lambda_i > 0 \wedge \lambda_j < 0$

$n = 3$

$$H(P_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

TROVARE AUTOVALORI:

$\det\left(H(P_0) - \lambda I\right) = 0$ POLINOMIO $3°$ GRADO NELL'INCOGNITA λ

CI SONO SEMPRE 3 SOLUZIONI $\to$ LA SOMMA DELLE MOLTEPLICITÁ È SEMPRE 3

$$\det\left(H(P_0) - \lambda I\right) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (*)$$

$$a = TR\left(H(P_0)\right) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$c = \det\left(H(P_0)\right)$$

$$b = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{12}^2 - a_{11}a_{33} - a_{11}a_{22} - a_{22}a_{33}$$

CRITERIO DI CARTESIO APPLICATO A $(*)$

GRADO + ALTO

||

$\hookrightarrow$ HA TANTI AUTOVALORI POSITIVI QUANTE LE VARIAZIONI IN SEGNO DEI COEFF. NON NULLI A PARTIRE DA QUELLO PIÙ ALTO

ESEMPIO

1) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

SOSTITUZIONE!

$f_x = 2x - 2yz$

$f_y = 2y - 2xz$

$f_z = 2z - 2xy$

$$\begin{cases} x - yz = 0 \longrightarrow x = yz \\ y - xz = 0 \longrightarrow y - yz^2 = 0 \longrightarrow y(1-z^2) = 0 \\ z - xy = 0 \end{cases}$$

$y = 0$ ① $\quad z = \pm 1$ ② $\to$ 2.1, 2.2

① $\bar{o} = (0,0,0)$ $\square$

$z = 1 \longrightarrow$ VADO NELLA 2^a EQ. $\quad y = x$

(2.1) $A = (-1,-1,1) \quad B = (1,1,1)$

(2.2) $C = (-1,1,-1) \quad D = (1,-1,-1)$

$2°$ PASSO

$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 2 \quad f_{zz} = 2$

$f_{xy} = -2z \quad f_{xz} = -2y \quad f_{yz} = -2x$

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2z & -2y \\ -2z & 2 & -2x \\ -2y & -2x & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(\bar{o}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ MAT. DIAGONALE (VALE ANCHE PER LE TRIANGOLARI)

I SUOI AUTOVALORI SONO GLI ELEMENTI DELLA DIAGONALE PRINCIPALE

- GLI AUTOVALORI SONO $\{2,2,2\} \Longrightarrow$ DEF. POS. $\Longrightarrow$ $\bar{o}$ È P.TO DI MINIMO

$$H(-1,-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$a = 2+2+2 = 6$

$c = \det(H(A)) = -32$ *

$b = 0$ $\quad -1, 6, \cancel{0}, -32 \Longrightarrow$ 2 VARIAZIONI DI SEGNO

$\downarrow$ SCARTO

$\Downarrow$

2 AUTOVAL. POSITIVI (DICE CARTESIO)

↳ IL TERZO È NULLO O NEGATIVO !!!

• UNA MAT. HA AUTOVAL. NULLI SSE È SINGOLARE ($\det = 0$) *

$\Rightarrow -32 \neq 0$ NON È SING. NO AUTOVAL. NULLI $\rightarrow$ IL TERZO AUTOVAL. È NEGATIVO $\rightarrow$ $H(A)$ INDEFINITA

↳ A È SELLA

ESEMPIO

$$f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 + yz + z^3$$

1° PASSO

$f_x = 3x^2 + y$

$f_y = x + 2y + z$

$f_z = y + 3z^2$

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + 3z^2 = \end{cases}$$

RIDUZIONE I CON III

I − III

↳ $3x^2 - 3z^2 = 0 \rightarrow z^2 = x^2 \Rightarrow z = \pm x$

① $z = -x \rightarrow$ VADO NELLA 2ª EQ. $\quad 2y = 0 \quad y = 0$

VADO NELLA 3ª EQ. $\quad z = 0 \quad \bar{O} = (0,0,0)$

② $2x + 2y = 0$